

Министерство образования РФ

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Механико-математический факультет

Кафедра геометрии и высшей алгебры

Отчет о научно-исследовательской работе

**Алгоритм поиска базисных циклов
одномерной группы гомологий
разветвленной поверхности**

Исполнитель:

студент 652 гр. М.А. Баутин

Научный руководитель:

профессор Е.И. Яковлев

Нижегород

2004 г.

1 Введение

В данной работе описан алгоритм построения базисных циклов одномерной группы гомологий (с коэффициентами из \mathbb{Z}_2) компактной триангулированной в общем случае разветвлённой, но однородной и связной поверхности.

Этот алгоритм является обобщением ранее известного и реализованного алгоритма построения базисных циклов одномерной группы гомологий двумерного многообразия.

2 Описание алгоритма

На вход алгоритм получает P – однородную и связную поверхность, заданную списком треугольников $\{\sigma_i^2\}$, списком рёбер $\{\sigma_j^1\}$ и набором соотношений инцидентности:

1. для каждого треугольника σ^2 список всех рёбер σ^1 , входящих в $\partial\sigma^2$;
2. для каждого ребра σ^1 список $\partial^{-1}(\sigma^1, P)$ всех треугольников σ^2 , таких, что $\sigma^1 \in \partial\sigma^2$.

На выходе алгоритм выдаёт набор циклов z_1, \dots, z_t полиэдра P , гомологические классы которых образуют базис $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Построение правильного разложения и графа

На этом шаге строится разложение $P = P_1 \cup \dots \cup P_m$, состоящее из подполиэдров P_1, \dots, P_m полиэдра P , являющихся многообразиями и ограниченными рёбрами ветвления полиэдра P .

Обозначим $D_i = \partial P_i$ (здесь $\partial : C_2(P) \rightarrow C_1(P)$ – граничный оператор).

Также строится одномерный подполиэдр (граф) $Q \subset P$ такой, что группы гомологий P и Q связаны следующей короткой точной последовательностью:

$$0 \rightarrow \langle D_1, \dots, D_q \rangle \xrightarrow{i_D} H_1(Q) \xrightarrow{i_*} H_1(P) \rightarrow 0 \quad (1)$$

где $\iota_D : \langle D_1, \dots, D_l \rangle \rightarrow H_1(Q)$ – включение, а $\iota_* : H_1(Q) \rightarrow H_1(P)$ – индуцированный гомоморфизм.

Процедура построения правильного разложения $\{P_i\}$ и графа Q описана в параграфе 3.

2. Нахождение базисных циклов

Найдем фундаментальные циклы z_1, \dots, z_n графа Q и исключительные рёбра $a_j \in z_j$, $j = 1, \dots, n$, т.е. такие рёбра, что $a_j \notin z_k$ при $k \neq j$. Алгоритм построения базисных циклов неориентированного графа и набора исключительных рёбер $\{a_j\}$ известен и описан в [1].

Далее составим матрицу B разложения циклов D_1, \dots, D_q по базисным циклам z_1, \dots, z_n , i -я строка которой содержит разложение цикла D_i :

$$b_{ij} = 1, \text{ если } a_j \in D_i$$

$$b_{ij} = 0, \text{ если } a_j \notin D_i, 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n.$$

С помощью перестановок и сложения строк приведем матрицу B к ступенчатому виду:

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * & \dots & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 1 & \dots & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где звездочкой обозначены произвольные элементы поля \mathbb{Z}_2 .

Составим список $S = \{j_1, \dots, j_s\}$, $s \leq n$ номеров столбцов матрицы \bar{B} , содержащих угловые единицы.

Удалим из набора $\{z_1, \dots, z_n\}$ элементы с номерами из списка S . Полученный набор является базисом группы $H_1(P)$. Обоснование приведено в параграфе 4.

3 Построение правильного разложения и графа

В этом параграфе описана процедура построения правильного разложения $\{P_i\}$ полиэдра P , а также подполиэдра $Q \subset P$, где $\dim Q = \dim P - 1$. Хотя для данной работы требуется только частный случай этой процедуры при $\dim P = 2$ (P – поверхность, Q – граф), процедура приведена для полиэдра произвольной размерности.

Пусть P – полиэдр размерности m , $K(P)$ – его симплициальный комплекс и для каждого $n = 0, 1, \dots, m$ символ $K^n(P)$ обозначает множество n -мерных симплексов из $K(P)$.

Симплексы σ^n и σ^{n-1} из $K(P)$ считаются инцидентными, если $\sigma^{n-1} \in \partial\sigma^n$. Набор всех n -симплексов полиэдра P , инцидентных симплексу σ^{n-1} , мы обозначаем символом $\partial^{-1}(\sigma^{n-1}, P)$, а их количество – символом $[\sigma^{n-1} : K^n(P)]$. Итак, всюду далее

$$\partial^{-1}(\sigma^{n-1}, P) = \{\sigma^n \in K^n(P) \mid \sigma^{n-1} \in \partial\sigma^n\},$$

$$[\sigma^{n-1} : K^n(P)] = \text{card } \partial^{-1}(\sigma^{n-1}, P).$$

Процедура построения правильного разложения.

Вход:

- 1) списки $K^m(P)$ и $K^{m-1}(P)$ симплексов полиэдра P ;
- 2) для каждого $\sigma^{m-1} \in K^{m-1}(P)$ список $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)$ и количество $[\sigma^{m-1} : K^m(P)]$ инцидентных ему m -симплексов того же полиэдра.

Выход:

- 1) списки $K^m(P_i)$, $K^{m-1}(\partial P_i)$ и $K^{m-1}(Q)$ симплексов подполиэдров P_i , ∂P_i , и Q полиэдра P , $i = 1, \dots, l$;
- 2) цепи $D_i \in C_{m-1}(P)$, $i = 1, \dots, l$.

Описание процедуры.

Шаг 1. Положим $K^{m-1}(Q) := \emptyset$ и $i := 1$.

Шаг 2. Построим пустые списки $K^m(P_i) := \emptyset$ и $K^{m-1}(\partial P_i) := \emptyset$, а также пустую (то есть равную нулю) цепь $D_i := \emptyset$.

Шаг 3. Для хранения $(m-1)$ -симплексов, используемых в качестве параметра при поиске в ширину, заведем пустую очередь $R := \emptyset$.

Шаг 4. Построение одной клетки P_i , ее границы ∂P_i , цепи D_i и входящей в P_i части подполиэдра Q .

Шаг 4.1. Инициализация. Выберем симплекс $\sigma_0^m \in K^m(P)$, добавим его в список $K^m(P_i)$ и удалим из $K^m(P)$.

Затем для каждой грани $\sigma_{0*}^{m-1} \in \partial\sigma_0^m$ выполним следующие действия: добавим σ_{0*}^{m-1} в конец очереди R и удалим симплекс σ_0^m из $\partial^{-1}(\sigma_{0*}^{m-1}, P)$.

Шаг 4.2. Одна итерация поиска в ширину. Выберем и удалим первый симплекс σ^{m-1} из очереди R , а также из списка $K^{m-1}(P)$. Проверим значение постоянной величины $[\sigma^{m-1} : K^m(P)]$ и состояние на данный момент переменного списка $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)$.

4.2.1. Если $[\sigma^{m-1} : K^m(P)] = 2$ и список $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)$ не пуст, то он содержит в этот момент единственный симплекс σ^m . Добавим σ^m в список $K^m(P_i)$ и удалим его из $K^m(P)$.

После этого для каждой грани $\sigma_*^{m-1} \in \partial\sigma^m \setminus \{\sigma^{m-1}\}$ выполним еще два действия: добавим σ_*^{m-1} в конец очереди R и удалим симплекс σ^m из $\partial^{-1}(\sigma_*^{m-1}, P)$.

Наконец, перейдем к шагу 4.3.

4.2.2. Во всех остальных случаях включим симплекс σ^{m-1} в списки $K^{m-1}(\partial P_i)$ и $K^{m-1}(Q)$, а также присвоим переменной D_i значение $D_i + \sigma^{m-1}$.

Шаг 4.3. Переход к следующей итерации. Проверим очередь R . Если она окажется не пустой, то вернемся к шагу 4.2.

Шаг 5. Переход к построению следующей m -мерной клетки. Если список $K^m(P)$ не пуст, то положим $i := i + 1$ и перейдем к шагу 2.

Шаг 6. Завершение построения подполиэдра Q . Присвоим переменной $K^{m-1}(Q)$ значение $K^{m-1}(Q) \cup K^{m-1}(P)$ и положим $K^n(Q) := K^n(P)$ для всех $n < m - 1$.

4 Обоснование алгоритма

Точность последовательности (1) доказана в параграфе 2 главы "Алгоритмы редукции" в [2]. Из этой последовательности вытекает, что $\ker \iota_* = \langle D_1, \dots, D_q \rangle$, т.е.

$$H_1(P) \cong H_1(Q) / \langle D_1, \dots, D_q \rangle, \quad (2)$$

причём изоморфизм $f : H_1(Q) / \langle D_1, \dots, D_q \rangle \rightarrow H_1(P)$ определяется формулой

$$f(z + \langle D_1, \dots, D_q \rangle) = [z]_{H_1(P)} \quad (3)$$

для $z \in H_1(Q)$.

Поскольку строки матрицы B соответствуют циклам D_1, \dots, D_q , операции перестановки и сложения этих строк можно отождествить с преобразованиями набора циклов D_1, \dots, D_q , не меняющими их линейную оболочку. Поэтому строки матрицы \bar{B} являются разложениями некоторых циклов $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_s \in H_1(Q)$ по циклам z_1, \dots, z_n , причём $\langle \bar{D}_1, \dots, \bar{D}_s \rangle = \langle D_1, \dots, D_q \rangle$.

Пусть $\{k_1, \dots, k_{n-s}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_s\}$. Покажем, что набор $[z_{k_1}]_{H_1(P)}, \dots, [z_{k_{n-s}}]_{H_1(P)}$ является базисом $H_1(P)$. В силу (3) для этого достаточно показать, что набор $\{z_{k_1} + \langle \bar{D}_1, \dots, \bar{D}_s \rangle, \dots, z_{k_{n-s}} + \langle \bar{D}_1, \dots, \bar{D}_s \rangle\}$ является базисом $H_1(Q)/\langle \bar{D}_1, \dots, \bar{D}_s \rangle$. Проверим критерий базиса. Предположим, нашлись $x_1, \dots, x_{n-s}, y_1, \dots, y_s \in \mathbb{Z}_2$ (не все равные нулю) такие, что $x_1 z_{k_1} + \dots + x_{n-s} z_{k_{n-s}} = y_1 \bar{D}_1 + \dots + y_s \bar{D}_s$. Выражая $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_s$ через $\{z_j\}$ в соответствии с \bar{B} , получаем противоречие с линейной независимостью $\{z_j\}$. Теперь рассмотрим произвольный $z + \langle \bar{D}_1, \dots, \bar{D}_s \rangle \in H_1(Q)/\langle \bar{D}_1, \dots, \bar{D}_s \rangle$. Учитывая вид матрицы \bar{B} , всегда можно выбрать представителя $z \in H_1(Q)$ так, чтобы занулить в его разложении коэффициенты при z_{j_1}, \dots, z_{j_s} . Но это и означает, что $z + \langle \bar{D}_1, \dots, \bar{D}_s \rangle$ выражается через классы элементов $z_{k_1}, \dots, z_{k_{n-s}}$.

Таким образом, мы показали, что гомологические классы циклов $z_{k_1}, \dots, z_{k_{n-s}}$ образуют базис $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$.

5 Реализация

Описанный алгоритм реализован на языке C++ и добавлен в вычислительный комплекс "Topology Student Labworks", позволяющий визуализировать шаги и результаты вычислений. Алгоритм проверен на некоторых разветвлённых поверхностях.

Список литературы

- [1] Липский В. Комбинаторика для программистов, М.: Мир. 1988.
- [2] Яковлев Е.И. Вычислительная топология. 2004.